



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

III) Ondes planes monochromatiques

Solutions en ondes planes monochromatiques = solutions des équations de Maxwell complexes en coordonnées cartésiennes, en l'absence de sources ($\rho_e = \rho_m = 0$, $\vec{J} = \vec{M} = \vec{0}$)

a - Relation de dispersion

C29 - Equation de Helmholtz

Espace libre

$$\epsilon, \mu \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J} \end{cases} \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -j\omega\mu (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

Identité $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{= \frac{\rho_e}{\epsilon} = 0} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -j\omega\mu (j\omega\epsilon\vec{E}) = \omega^2\mu\epsilon\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \omega^2\mu\epsilon\vec{E} = \vec{0}} \quad \text{équation de Helmholtz vectorielle}$$

En cartésien: $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \Rightarrow \nabla^2 \underset{\substack{| \\ x \\ y \\ z}}{E_x} + \omega^2\mu\epsilon \underset{\substack{| \\ x \\ y \\ z}}{E_x} = 0$

= trois équations de Helmholtz scalaire découplées

Solution? Essayons $\vec{E} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{polarisation}}}{\hat{e}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{amplitude}}}{E_0} e^{-j\beta \cdot \vec{r}}$ → vecteur quelconque

↳ essayons de reporter cette forme dans l'équation



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Théorème: Pour $\vec{U} = \hat{e} e^{\vec{\alpha} \cdot \vec{r}}$, $\vec{\nabla} \leftrightarrow \vec{\alpha}$ c'est à dire

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \vec{\alpha} \cdot \vec{U} \\ \vec{\nabla} \times \vec{U} = \vec{\alpha} \times \vec{U} \\ \vec{\nabla}^2 \vec{U} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha}) \vec{U} \end{cases} \quad (\text{cf. séance d'exercice})$$

C30 - Relation de dispersion

Si $\vec{E} = \hat{e} E_0 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}$ est solution de $\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = \vec{0}$
 alors $(-j\vec{\beta}) \cdot (-j\vec{\beta}) \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow (-\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} + \omega^2 \mu \epsilon) \vec{E} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ ou $\vec{E} \neq \vec{0}$ et $\boxed{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \omega^2 \mu \epsilon}$ relation de dispersion: à un ω fixé, pas tous les $\vec{\beta}$ me sont possibles

$\vec{\beta} = \beta_x \hat{x} + \beta_y \hat{y} + \beta_z \hat{z}$ vecteur d'onde



C31 - Interprétation

En domaine fréquentiel. Prenons par ex $\vec{\beta} = \beta \hat{z}$, $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon$.

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -j\vec{\beta} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\beta} \perp \vec{E}$. Par exemple, prenons

$$\vec{E} = \hat{x} E_0 e^{-j\beta z}$$

$$A z = 0: \vec{E}_1 = \hat{x} E_0$$

$$A z = \frac{\pi}{2\beta}: \vec{E}_2 = \hat{x} E_0 e^{-j90^\circ}$$

$$A z = \frac{2\pi}{\beta}: \vec{E}_3 = \hat{x} E_0$$

$\vec{E}_2$ est en retard sur $\vec{E}_1$ de 90° ($z = \frac{\lambda}{4}$)
 $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ longueur d'onde



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

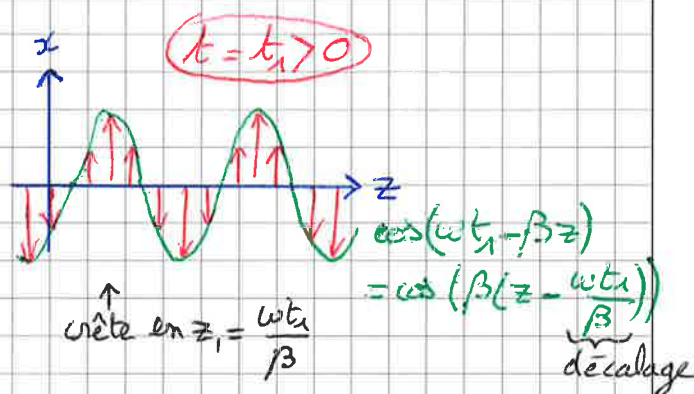
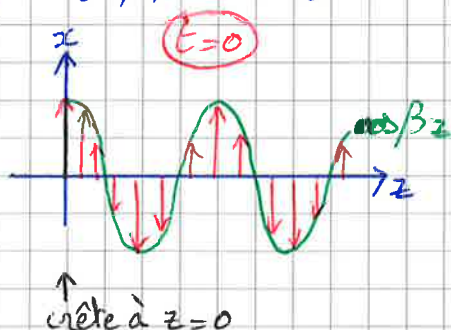
$\Rightarrow \vec{\beta} = \beta \hat{\beta}$, $\hat{\beta}$ indique la direction de propagation

Les surfaces de phase constantes sont ($\beta z = \text{const}$) des plans $\perp$ à $\vec{\beta}$

$\hat{x}$ indique la polarisation du champ ($\perp$ à $\vec{\beta}$)

En domaine temporel, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \hat{x} E_0 e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \}$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{x} E_0 \cos(\omega t - \beta z)$$



* Vitesse de crête = vitesse de phase v_p

$$v_p = \frac{z_1}{t_1} = \frac{\omega t_1}{\beta t_1} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

la même à toute
fréquence ω !

vide : $v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

* longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{2\pi}{2\pi f \sqrt{\mu \epsilon}} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{v_p}{f}}$

* Matériaux :

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu} f} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \underbrace{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}_n f} = \frac{c_0}{n f} = \frac{\lambda_0}{n} \quad n > 1 \Rightarrow \lambda < \lambda_0$$

n indice de réfraction

Antenne GPS (1.6 GHz) :

$$\lambda_0 = \frac{30(\text{cm})}{f(\text{GHz})} = 20 \text{ cm}$$



FR4 ($\epsilon_r = 4$)

$\lambda/2 = 5 \text{ cm}$



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

C32 - Impédance caractéristique

Champ $\vec{H}$ associé à $\vec{E} = \hat{e} E_0 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}$?

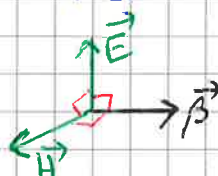
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \Rightarrow -j\vec{\beta} \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu} (\vec{\beta} \times \vec{E})$$

$$\vec{\beta} = \beta \hat{\beta} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\beta}{\omega\mu} (\hat{\beta} \times \vec{E})$$

$$\frac{\beta}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\omega\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu/\epsilon}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [\Omega]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = \frac{1}{\eta} (\hat{\beta} \times \vec{E})}$$



$(\vec{\beta}, \vec{E}, \vec{H})$ trièdre direct

η est le rapport entre $|\vec{E}|$ et $|\vec{H}|$ dans le milieu = impédance caractéristique du milieu

vide : $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \Omega$

→ voir les conventions sur moodle

b. Polarisation

C33 - Solutions en ondes planes :

$$\vec{E} = \hat{e} E_0 e^{-j\vec{\beta} \cdot \vec{r}}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta} (\vec{\beta} \times \vec{E}) \quad \text{avec } \vec{\beta} \cdot \hat{e} = 0 \text{ et } \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \omega^2 \mu \epsilon$$

Prenons par exemple $\vec{\beta} = \beta \hat{z}$. La forme générale est alors :

$$\vec{E} = (\hat{x} E_{0x} + \hat{y} E_{0y}) e^{-j\beta z} \quad \text{avec } E_{0x}, E_{0y} \in \mathbb{C}$$

polarisation = orientation de $\vec{E}$ en un plan $\perp \vec{\beta}$ donné lorsque t varie $\rightarrow$ dépend de E_{0x}, E_{0y} .